

В. А. УСПЕНСКИЙ

СИСТЕМЫ ПЕРЕЧИСЛИМЫХ МНОЖЕСТВ И ИХ НУМЕРАЦИИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 30 VIII 1955)

Произвольное отображение α какого-либо множества натуральных чисел E на множество M называется нумерацией множества M ; если $\alpha(n) = x$, то n называется номером x . В теории алгоритмов важную роль играют нумерации системы $\mathfrak{U}^{(n)}$ всех перечислимых (т. е. рекурсивно-перечислимых) подмножеств N^n (здесь N^n — совокупность всех « n -ок» натуральных чисел) и системы $\mathfrak{U}^{(n)}$ всех вычислимых (т. е. частично-рекурсивных) функций от n аргументов. В литературе известны следующие нумерации этих систем, которые мы будем называть классическими нумерациями: нумерация $\mathfrak{U}^{(1)}$, принадлежащая Посту ⁽²⁾; нумерация $\mathfrak{U}^{(n)}$ (при любом n), принадлежащая Клини ⁽³⁾; нумерация $\mathfrak{U}^{(1)}$, рассмотренная Райсом ⁽⁴⁾. Каждая классическая нумерация строится по следующему плану: всякому перечислимому множеству (или вычислимой функции) ставится в соответствие определяющий его (ее) конечный набор правил; этот набор правил записывается в определенном коде; все такие записи нумеруются, и тем самым получается нумерация исходной системы. Эта особенность классических нумераций обуславливает их широкую применимость. В настоящей заметке делается попытка рассмотреть с возможно более общей точки зрения существенные для теории алгоритмов свойства нумераций* систем перечислимых множеств, не прибегая в окончательных формулировках к таким понятиям, как «набор правил, определяющий данное перечислимое множество». (Каждую вычислимую функцию мы отождествляем с перечислимым множеством, являющимся ее графиком, и рассматриваем таким образом $\mathfrak{U}^{(n)}$ как систему всех униформных перечислимых подмножеств N^{n+1} .) Пп. 1—3 носят вводный характер.

1. Сведения из топологии. Точку x топологического пространства ⁽¹⁾ T назовем точкой τ -прикосновения множества $P \subseteq T$, если в всякой окрестности точки x найдется такая точка $z \in P$, что всякая окрестность z содержит x . Совокупность всех точек τ -прикосновения P назовем τ -замыканием P . Назовем P τ -замкнутым, если оно совпадает со своим τ -замыканием. Скажем, что P τ -плотно в Q , если Q есть подмножество τ -замыкания P .

Лемма 1. Пусть X и Y — топологические пространства, причем Y есть T_0 -пространство. Пусть $P \subseteq X$ τ -плотно в X . Тогда всякие два непрерывные отображения X в Y , совпадающие на P , совпадают и на всем X .

2. Системы. На протяжении всей заметки под термином «система» будем понимать произвольную систему перечислимых подмножеств множества N^n при каком-либо n (или, при желании, произвольную систе-

* Идея абстрактного изучения нумераций была высказана А. Н. Колмогоровым в докладе, сделанном 9 II 1954 г. на семинаре по рекурсивной арифметике Механико-математического факультета МГУ.

му перечислимых подмножеств \mathfrak{F} ⁽⁵⁾). Системы будем обозначать прописными готическими буквами. Для системы, все элементы которой конечны, можно различными естественными способами уточнить понятие «перечислимости»; например, можно назвать систему конечных множеств \mathfrak{R} перечислимой, если множество $K \subseteq \mathfrak{F}$, составленное из всех представителей всех элементов \mathfrak{R} , перечислимо ⁽⁶⁾. Каждую систему \mathfrak{M} будем без оговорок считать T_0 -пространством с топологией, введенной в ⁽⁵⁾, п. 1. Подсистему $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{M}$ назовем эффективно открытой в \mathfrak{M} , если существует такая перечислимая система конечных множеств \mathfrak{R} , что $\mathfrak{P} = \bigcup \mathfrak{Q}_F \{F \in \mathfrak{R}\}$, где \mathfrak{Q}_F — система всех множеств из \mathfrak{M} , содержащих F в качестве подмножества. Назовем \mathfrak{M} ω -сепарабельной, если подсистема \mathfrak{M}' всех конечных множеств из \mathfrak{M} перечислима и τ -плотна в \mathfrak{M} , и псевдозамкнутой, если \mathfrak{M} τ -замкнута во всякой объемлющей системе. Наиболее важные системы — $\mathfrak{U}^{(1)}$ и $\mathfrak{U}^{(2)}$ — являются ω -сепарабельными, псевдозамкнутыми и связными (топологически).

3. Занумерованные множества. Множество M , рассматриваемое вместе с его нумерацией α , назовем занумерованным множеством и обозначим $M\alpha$. Подмножество $P \subseteq M$ назовем вполне перечислимым в $M\alpha$, если $\alpha^{-1}(P)$ перечислимо в $\alpha^{-1}(M)^*$, и вполне разрешимым в $M\alpha$, если P и $M \setminus P$ вполне перечислимы в $M\alpha$ (Райс ⁽⁴⁾) ввел эти понятия для рассмотренной им нумерации). Рассматривая нумерации систем, будем говорить о занумерованных, вполне перечисливых и т. д. системах. Вычислимым отображением $X\alpha$ в $Y\beta$ назовем всякое отображение f множества X в Y , для которого существует такая вычислимая функция θ , что для любой точки $x \in X$ имеет место $\theta(\alpha^{-1}(x)) \subseteq \beta^{-1}(f(x))$. Будем говорить, что $X\alpha$ вложено в $Y\beta$, если $X \subseteq Y$ и тождественное отображение $f(x) \equiv x$ множества X в Y вычислимо. Если M — топологическое пространство, то его нумерацию назовем открытой, коль скоро всякое его вполне перечислимое подмножество открыто, и непрерывной, коль скоро всякое открытое множество есть сумма вполне перечислимых.

Лемма 2. Пусть X и Y — топологические пространства, α — открытая нумерация X и β — непрерывная нумерация Y . Тогда всякое вычислимое отображение $X\alpha$ в $Y\beta$ непрерывно.

4. Вычислимые и потенциально вычислимые нумерации. Пусть $M\alpha$ — занумерованная система. Множество всех пар n, t , где n принадлежит области определения α , а $t \in \alpha(n)$, называется универсальным множеством, соответствующим нумерации α . Нумерацию α назовем вычислимой, если соответствующее универсальное множество и множество $\alpha^{-1}(M)$ всех номеров суть перечислимые множества. Хорошо известно, что все классические нумерации вычислимы. Однако не всякая система обладает вычислимой нумерацией. Известно, что ею не обладает система всех общерекурсивных функций от n аргументов. Можно доказать, что ею не обладает система всех бесконечных перечислимых подмножеств N^n . Нумерацию α системы \mathfrak{M} назовем потенциально вычислимой, если существует такая система \mathfrak{Q} и такая ее вычислимая нумерация β , что $\mathfrak{M}\alpha$ вложена в $\mathfrak{Q}\beta$. Для каждой потенциально вычислимой нумерации имеется общий метод (алгоритм), позволяющий по всякому номеру всякого перечислимого множества из рассматриваемой системы построить набор правил, определяющий это множество.

Теорема 1. Всякая система обладает потенциально вычислимой нумерацией.

Теорема 2. Если α — потенциально вычислимая нумерация системы \mathfrak{M} , то всякая система $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{M}$, эффективно открытая в \mathfrak{M} , вполне перечислима в $M\alpha$.

* Мы говорим, что $R \subseteq E$ перечислимо в E , если $R = E \cap S$, где S — перечислимое множество.

(Райс ⁽⁴⁾) доказал эту теорему для рассмотренной им нумерации системы $\mathfrak{U}^{(1)}$.)

Следствие. *Всякая потенциально вычислимая нумерация непрерывна.*

5. Накрывающие и вполне накрывающие нумерации. Для каждой из классических нумераций имеется общий метод (алгоритм), позволяющий по каждому набору правил, определяющему какое-либо множество из рассматриваемой системы, найти номер этого множества в данной нумерации. Это интуитивное свойство отражается, как мы надеемся, формальным определением вполне накрывающей нумерации. Нумерацию γ системы \mathfrak{M} назовем накрывающей (вполне накрывающей), если всякая занумерованная система $\mathfrak{F}\varphi$, где $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$, а φ — вычислимая (потенциально вычислимая) нумерация, вложена в $\mathfrak{M}\gamma$. Все классические нумерации — вполне накрывающие. Неизвестно, существует ли накрывающая нумерация, не являющаяся вполне накрывающей (см. теорему 4).

Теорема 3. *Всякая система обладает вполне накрывающей нумерацией.*

Теорема 4. *Если \mathfrak{M} — псевдозамкнутая ω -сепарабельная система, то всякая ее накрывающая нумерация является вполне накрывающей.*

Теорема 5 (обратная к теореме 2). *Если \mathfrak{M} есть ω -сепарабельная система и γ — ее накрывающая нумерация, то всякая система $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$, вполне пере-ислимая в $\mathfrak{M}\gamma$, эффективно открыта в \mathfrak{M} .*

(Райс ⁽⁴⁾ сформулировал это утверждение в качестве гипотезы для того частного случая, когда $\mathfrak{M} = \mathfrak{U}^{(1)}$ и γ — рассмотренная им нумерация.)

Следствие. *Всякая накрывающая нумерация ω -сепарабельной системы открыта.*

Следствие из следствия. *Если ω -сепарабельная система \mathfrak{M} связна и γ — ее накрывающая нумерация, то в $\mathfrak{M}\gamma$ нет нетривиальной (т. е. отличной от пустой и от \mathfrak{M}) вполне разрешимой подсистемы.*

Это следствие из следствия содержит в качестве частного случая результаты Райса ⁽⁴⁾ об отсутствии в рассмотренной им нумерации системы $\mathfrak{U}^{(1)}$ нетривиальных вполне рекурсивных классов как при сильном, так и при слабом определении.

6. Связь с вычислимыми операциями ⁽⁴⁾.

Теорема 6(7). *Пусть $\mathfrak{X}\alpha$ и $\mathfrak{Y}\beta$ — занумерованные системы, причем α — вычислимая (потенциально вычислимая), а β — накрывающая (вполне накрывающая) нумерации. Тогда всякая одноместная вычислимая операция, отображающая \mathfrak{X} в \mathfrak{Y} , совпадает на \mathfrak{X} с некоторым вычислимым отображением $\mathfrak{X}\alpha$ в $\mathfrak{Y}\beta$.*

Теорема 8(9) (обратная к теореме 6(7)). *Пусть $\mathfrak{Y}\beta$ — занумерованная система. Если для всякой занумерованной системы $\mathfrak{X}\alpha$ с вычислимой (потенциально вычислимой) нумерацией и всякой одноместной вычислимой операции, отображающей \mathfrak{X} в \mathfrak{Y} , существует совпадающее на \mathfrak{X} с этой операцией вычислимое отображение $\mathfrak{X}\alpha$ в $\mathfrak{Y}\beta$, то β — накрывающая (вполне накрывающая) нумерация.*

Теорема 10. *Пусть $\mathfrak{X}\alpha$ есть ω -сепарабельная система с накрывающей, а $\mathfrak{Y}\beta$ — система с потенциально вычислимой нумерацией. Тогда для всякого вычислимого отображения $\mathfrak{X}\alpha$ в $\mathfrak{Y}\beta$ существует одноместная вычислимая операция, совпадающая на \mathfrak{X} с этим отображением.*

Теорема 6 играет решающую роль в доказательстве теоремы 5. Теорема 10 доказывается при помощи обеих лемм, следствий теорем 2 и 5, а также теоремы 2 из ⁽⁵⁾. Пусть $X_1\alpha_1, \dots, X_l\alpha_l, \mathfrak{Y}\beta$ — занумерованные множества. Отображение f прямого произведения $X_1 \times \dots \times X_l$ в \mathfrak{Y} , для которого существует такая вычислимая l -местная функция θ , что

коль скоро $f(x_1, \dots, x_l) = y$ и $\alpha_i(n_i) = x_i$ ($i = 1, \dots, l$), то назовем $\beta(\theta(n_1, \dots, n_l)) = y$ вычислимым отображением прямого произведения $\Pi X_i \alpha_i$ в $Y\beta$. Если определить само понятие прямого произведения занумерованных множеств и обобщить на него предыдущие понятия и результаты, то можно доказать следующие теоремы:

Теорема 6* (7*). Пусть $X_i \alpha_i$ ($i = 1, \dots, l$), $\mathcal{V}\beta$ — занумерованные системы, причем α_i — вычислимые (потенциально вычислимые), а β — накрывающая (вполне накрывающая) нумерация. Тогда всякая l -местная вычислимая операция, отображающая $X_1 \times \dots \times X_l$ в \mathcal{V} , совпадает на $X_1 \times \dots \times X_l$ с некоторым вычислимым отображением $\Pi X_i \alpha_i$ в $\mathcal{V}\beta$.

Теорема 10*. Пусть $X_i \alpha_i$ ($i = 1, \dots, l$) суть ω -сепарабельные системы с накрывающими нумерациями, а $\mathcal{V}\beta$ — система с потенциально вычислимой нумерацией. Тогда для всякого вычислимого отображения $\Pi X_i \alpha_i$ в $\mathcal{V}\beta$ существует l -местная вычислимая операция, совпадающая на $X_1 \times \dots \times X_l$ с этим отображением.

7. Главные нумерации. Нумерацию, являющуюся одновременно вычислимой и накрывающей, назовем главной нумерацией 1-го рода, а являющуюся одновременно потенциально вычислимой и вполне накрывающей — главной нумерацией 2-го рода. Все классические нумерации суть главные нумерации 1-го и 2-го рода одновременно. Значение главных нумераций показывает теорема 11*, вытекающая из теорем 6*, 7*, 10*.

Теорема 11*. Пусть $X_i \alpha_i$ ($i = 1, \dots, l$) и $\mathcal{V}\beta$ суть ω -сепарабельные системы с главными нумерациями (одного и того же рода). Тогда класс вычислимых операций, отображающих $X_1 \times \dots \times X_l$ в \mathcal{V} , совпадает на $X_1 \times \dots \times X_l$ с классом вычислимых отображений $\Pi X_i \alpha_i$ в $\mathcal{V}\beta$.

Теорема 12. Всякая система обладает главной нумерацией 2-го рода.

Что касается существования главных нумераций 1-го рода, то удалось установить лишь следующие теоремы:

Теорема 13. Всякая ω -сепарабельная псевдозамкнутая система обладает главной нумерацией 1-го рода.

Теорема 14. Каждая связная ω -сепарабельная система, обладающая вычислимой нумерацией, обладает и вычислимой нумерацией, не являющейся накрывающей (и тем самым не являющейся главной).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
30 VIII 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ П. С. Александров, Введение в общую теорию множеств и функций, 1948.
² E. L. Post, Bull. Am. Math. Soc., 50, 284 (1944). ³ S. C. Kleene, Introduction to Metamathematics, 1952. ⁴ H. G. Rice, Trans. Am. Math. Soc., 74, 358 (1953).
⁵ В. А. Успенский, ДАН, 103, № 5 (1955).